UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

CP-II, Semestre 4	Devoir Surveillé d'Analyse 4	Année 2018/2019
24 avril 2019 , durée : 2h.		Prof: F.MORADI

N.B: il sera tenu compte de la **Rédaction** et de la **Clarté** de la **Réponse "RCR"**.

	Exercice 1 : (5points)
1pt	1- Calculer l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (cosx)^2 dx.$
1.5pt	2- En utilisant le changement de variables, $x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} sint$, calculer l'intégrale $J = \int_1^2 \sqrt{-x^2 + 3x - 2}\, dx.$ (Ecrivez le trinôme $(-x^2 + 3x - 2)$ sous sa forme réduite : $a(x+b)^2 + c$).
1pt	3- En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $K = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} dt.$
1.5pt	4- En utilisant le changement de variables, $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, calculer l'intégrale $L = \int_1^{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx$
	Exercice 2 : (4points)
2pt	1- Calculer les limites suivantes $lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt, \quad lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1+t} dt.$

1pt **1pt**	2- *Montrer que:* $lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}x^{\frac{1}{n}}dx = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$. 3- *En déduire que:* $lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty}e^{-x^n}dx = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$
  0.5pt **1pt** **1.5pt** **1pt** **1pt** **1pt** **1pt**	***<u>Exercice 3: (7points)</u>*** *Soit* $f(x) = \int_x^{2x}e^{-t^2}dt$, *pour* $x\epsilon\mathbb{R}$. 1- *Montrer que f est impaire.* 2- *Montrer que :* $\forall x\epsilon\mathbb{R}^+$: $0 \le f(x) \le xe^{-x^2}$ *et en déduire la limite* $lim_{x\to+\infty} f(x)$. 3- *Montrer que f est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et calculer* $f'(x)$. 4- *Dresser le tableau de variations de f sur* $\mathbb{R}^+$ *puis sur* $\mathbb{R}$. 5- *Calculer* $f''(x)$ *sur* $\mathbb{R}$. 6- *Etudier la convexité de f sur* $\mathbb{R}^+$ *puis sur* $\mathbb{R}$. 7- *Soit* $y > 0$, *on pose :* $F(y) = \int_0^y f(x)dx$. *Montrer que :* $F(y) = yf(y) + \frac{1}{4}\left(e^{-4y^2} - 2e^{-y^2} + 1\right)$.
  2pt **2pt**	***<u>Exercice 4: (4points)</u>*** 1. *Calculer les intégrales multiples suivantes :* $I = \int_0^1\left(\int_0^x x^2e^{xy}dy\right)dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}sin(x+y+z)dx\right)dy\right)dz$. 2. *Calculer l'intégrale :* $K_x = \int_0^x t^2(x-t)dt$, *et en déduire l'intégrale :* $L = \int_0^1\int_0^{1-x}x^2y^2(1-x-y)dx\,dy$

BONNE CHANCE